基礎統計（木５）過去問２００３　解答

問１

（１）

$$P(70 \leq X) \ = P\left(2 \leq \frac{X-50}{10}\right) = 0.023$$

$$P(40 \leq X \leq 60) = P\left(-1 \leq \frac{X-50}{10} \leq 1\right) = 1 - 0.159 \times 2 = 0.682$$

$$P(X \leq 55) = P\left(\frac{X-50}{10} \leq 0.5\right) = 1 - 0.309 = 0.691$$

（２）

$$X_i \sim N(86.8\ ,\ 4.8^2)$$

$$\therefore \bar{X} \sim N\left(86.8\ ,\ \frac{4.8^2}{16}\right)$$

$$\therefore P(\bar{X} < 85) = P\left(\frac{\bar{X} - 86.8}{\frac{4.8}{4}}\right) = 0.0668$$

問２

（１）

$$P(X = 3) =_5 C_3 (0.6)^3 (0.4)^2 = 0.3456$$

（２）

$$\lambda = np = 2$$

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = 2.7^{-2}\frac{2^3}{3 \times 2} = 0.183$$

覚えずらい式だと思いますが、$\sum_{x=0}^{\infty}$ をとってやれば、１になることが確認できます。

（３）

$$0.4^2 \times 0.6 = 0.096$$

（４）

$$P(B) =_5 C_3 p^3 (1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2$$

$$P(A \cap B) = p \times_4 C_2 \times p^2 (1-p)^2 = 6p^3(1-p)^2$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{5} = 0.6$$

問３

（１）

$X_1, X_2, \cdots, X_n$が独立であり、同一の分布に従うならば、$X_1, X_2, \cdots, X_n$の平均$\bar{X}$は正規分布に従う

Wikipedia によると $\bar{X}$ と μ の誤差が正規分布に従うという事でしたが、結局は同じ事です。

（２）

$$\bar{X} \sim N\left(p\,,\frac{p(1-p)}{n}\right)$$

（３）

$$X_i \sim Bi(1\,,p)$$

$$\bar{X} \sim N(p\,,\frac{p(1-p)}{400})$$

$$P\left(\frac{|\bar{X}-p|}{\frac{p(1-p)}{20}} < 1.96\right) = 0.95$$

$$\frac{|\frac{56}{400}-0.1|}{\frac{0.1(1-0.1)}{20}} = 2.67$$

よって $2.67 > 1.96$ より悪化

問４

（１）

$\bar{X}$ は μ の不偏推定量だから。

（２）

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{20}}} \sim t(19)$$

$$P\left(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\frac{S}{\sqrt{20}}} < 2.093\right) = 0.95$$

よって信頼係数０．９５の信頼区間は

$$[30.5 - \frac{2.093\times 4.2}{\sqrt{20}}\,,30.5 + \frac{2.093\times 4.2}{\sqrt{20}}]$$

$$[28.53\,,32.47]$$

（３）

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{20}}} \sim N(0\,,1)$$

$$P\left(\frac{|\bar{X}-\mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{20}}} < 1.96\right) = 0.95$$

$$[30.5 - 1.96\frac{4}{\sqrt{20}}\,,30.5 + 1.96\frac{4}{\sqrt{20}}]$$

$$[28.75\,,32.25]$$

（４）

$$\frac{19 \times s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(19)$$

$$P\left(8.91 < \frac{19 \times s^2}{\sigma^2} < 32.9\right) = 0.95$$

$$[\frac{19 \times 17.64}{32.9}\,, \frac{19 \times 17.64}{8.91}]$$

$$[10.2\,, 37.6]$$

問５

（１）

$$E(X) = \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = \frac{10}{15} = E(Y)$$

$$E(XY) = \frac{4}{15}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{8}{45}$$

（２）

$$E(X^2) = \frac{8}{15} + \frac{4}{15} = \frac{12}{15} = E(Y^2)$$

$$V(X) = V(Y) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{16}{45}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = -0.5$$

（３）やや負に相関

（４）

$$Z \sim Bi\left(90\,, \frac{1}{3}\right)$$

$$E(Z) = 30\,, V(Z) = 20$$

問６

（１）

$$b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = 0.77$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 45.0$$

$$y = 0.77x + 45$$

式を忘れてしまっても、$T = \sum_{i=1}^{N} \{y_i - (bx_i + a)\}$ で $\frac{\delta T}{\delta a} = 0$, $\frac{\delta T}{\delta b} = 0$ の式から a と b の値は求まります。
（2）父の身長と子の身長には正の相関関係がある。
（3）

$$r_{xy}^2 = \left(\frac{Cov(x, y)}{S_x S_y} \right)^2 = 0.671$$

決定係数が相関係数の2乗になっているというのはプリントに書いてあったと思います。