基礎統計（倉田）　06 年解答

問 1

(1) 一人の出生男児を無作為に選んだときの体重を X とおくと

$$X \sim N(3.2, 0.4^2) \quad よって Z = \frac{X-3.2}{0.4} \sim N(0,1)$$

したがって、$P(2.7 \le X \le 3.7) = P(-1.25 \le Z \le 1.25) = 0.789$

(2)(1)の X を$X_i (i = 1 \sim 16)$とする。そして、新たに $T = X_1 + \cdots + X_{16}, \overline{X} = \frac{T}{16}$ とおく

すると、$\overline{X} \sim N\left(3.2, \frac{0.4^2}{16}\right) = N(3.2, 0.1^2)$となり、$Z = \dfrac{X - 3.2}{0.1} \sim N(0,1)$となり,

$P(\overline{X} \le 3.35) = P(Z \le 1.5) = 0.9332$

(3)ある人が実際にウイルスに感染している事象を A、検査が陽性である事象を B とし、

P(A)=p P(B | A)=q $P(B|\overline{A}) = r$ とする

すなわち、$p = 5.0 * 10^{-4}, q = 99.8 * 10^{-2}, r = 3.0 * 10^{-3}$

ベイズの定理により、

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

一方

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = q \quad \therefore P(B \cap A) = pq$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = r \quad \therefore P(B \cap \overline{A}) = (1-p)r$$

一方、$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = pq + (1-p)r \quad \therefore P(A|B) = \frac{pq}{pq + (1-p)r} = 0.1427$

(4) (3)の結果より、この検査法は実際に感染しているものを見逃す確率は低いが、感染していない者を、誤って陽性とする確率はかなり高い。

問 2 よーわからん

問 3 ポアソン分布の確率密度関数 $f(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}!}$

λ=3 として、

(1)$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 4)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 3)=1-\sum_{\mathrm{k}=0}^{3}\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=1-f(0)-f(1)-f(0)=0.34$

(2)$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)^2=2.6\times 10^{-3}$

(3)ある 1ml 溶液にすくなくとも　一個のバクテリアが含まれる確率は

$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 1)=1-\mathrm{P}(0)=0.949$

i)　3 回中 2 回に少なくとも 1 個、残りの一回は 0 個のとき、

${}_3\mathrm{C}_2\ 0.949^2 0.05080=0.137$

ii) 3 回中 3 回とも、少なくとも 1 個のとき

$0.949^3=0.855$

したがって、求める確率は、0.99

問 4 (1) $\overline{\mathrm{X}}\sim\mathrm{N}\left(\mu_1,\frac{\sigma^2}{14}\right)$なので、スチューデントの t 統計量は $\mathrm{t}=\frac{\overline{\mathrm{X}}-\mu_1}{\sqrt{\frac{\mathrm{S}_1^2}{14}}}$は $\mathrm{t}\sim\mathrm{t}(13)$なので、

$\mathrm{P}(-2.160\leq \mathrm{t}\leq 2.160)=0.95\ \therefore \mathrm{P}\left(40.5\leq \mu_1\leq 47.9\right)=0.95$

したがって、もとめる 95%信頼区間は、[40.5,47.9]

(2)X は正規分布なので、$\chi^2=\frac{13\mathrm{s}_1^2}{\sigma_1^2}$とすると、これは、$\chi^2(13)$分布に従う。よって

$\mathrm{P}\left(5.00875\leq \chi^2\leq 24.7356\right)=0.950\ \therefore \mathrm{P}\left(2.20\leq \sigma_1^2\leq 10.9\right)=0.950$

したがって、求める信頼区間は[2.20,10.9]

(3)二つの標本をプールした標本分散を s とすると、$\mathrm{s}=(13\mathrm{s}_1^2+9\mathrm{s}_2^2)/(14+10-2)$=5.1

このとき、2 標本 t 統計量 $\mathrm{t}=\frac{(\overline{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{Y}})-(\mu_1-\mu_2)}{\mathrm{s}\sqrt{\frac{1}{14}+\frac{1}{10}}}$は、自由度 22 で、t(22)分布にしたがう。

よって、$\mathrm{P}(-2.074\leq \mathrm{t}\leq 2.074)=0.95\ \therefore \mathrm{P}\left(-9.78\leq \mu_1-\mu_2\leq -1.02\right)$

よって、求める 95%信頼区間は、$[-9.78,-1.02]$

問 5(1)

X	0	1	2
	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Y	1	2	3
	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

(2)

$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$,$\mathrm{E(X^2)} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5} = \frac{9}{5}$,$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} - \{\mathrm{E(X)}\}^2 = \frac{4}{5}$

(3)$\mathrm{E(Y)} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} = 2$

XY	0	1	2	3	4	5	6
	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$

E(XY)=2

Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2-2=0

(4)(X,Y)の同時確率分布関数、X,Y の周辺ぷんぷ関数をそれぞれ $f(x,y)$,$g(x)$,$h(y)$
とおくと、

$f(0,1)=\frac{2}{5}$,$g(0)=\frac{2}{5}$,$h(1)=\frac{2}{5}$

なので、$f(x,y)\neq g(x)h(y)$

したがって、X, Y は独立でない。