序論

力学

ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\vec{F}$$

$\vec{F}$: 力 $\longrightarrow r(t)$

例　万有引力→惑星の運動

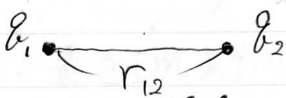
ほとんどすべての運動を説明

適用限界

- 光の速さぐらい速い運動 → 特殊相対性理論
- 分子や原子ぐらい小さい世界 → 量子力学
- 光などの電磁波 ——→ 古典場の理論

} 量子場の理論

Coulombの法則



$$F_{12}=k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}$$

k : 比例定数

$$F_{12}=q_1E,\quad E=k\frac{q_2}{r_{12}}$$

E : 電場

定常電流間の力

→磁場Bを使って説明

電場 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 磁場 $\vec{B}(\vec{r},t)$ は Maxwell方程式で 記述できる物理的実在 である。

遠隔作用→近接作用
重要な例：電磁波
◦量子場の理論では電子などの粒子も量子的な場で記述される。
◦「強い相互作用」，「弱い相互作用」も量子場の理論で記述される。
万有引力は？
重力場
一般相対性理論

$\updownarrow$ 量子場の理論では融合できない。

量子力学

$\Rightarrow$ 候補：超弦理論

Maxwell方程式

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \\ \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \end{cases}$$

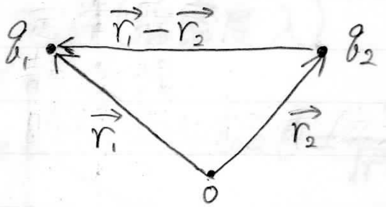
ρ：電荷密度
j：電流密度
ε_0：真空の誘電率
μ_0：真空の透磁率
Lorentz力 $q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$

積分形

$$\begin{cases} \int_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{r}=-\int_S\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \varepsilon_0\int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_V\rho\, dV \\ \int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{r}=\mu_0\int\left(j+\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \\ \int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \end{cases}$$

§1 静電場

§1.1 Coulombの法則



$\vec{r}_i$：位置ベクトル

q_i：電荷

$(i=1,2)$

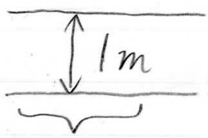
$$\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}, \quad k>0$$

q_2がq_1におよぼす力

電荷の単位

国際単位系(SI)

電流1Aを定義



1Aの平行電流

長さ1mあたりに2.0×10^{-7}Nの力をおよぼしあう。

電荷1C：1Aの電流が1秒間にはこぶ電荷の量

$(C=A\cdot s)$

$k=8.988\times10^{9}\ N\cdot m^2/C^2$

$k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$　ε_0：真空の誘電率

$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\ C^2/Nm^2$

$$\vec{F}_{12}=\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^3}$$

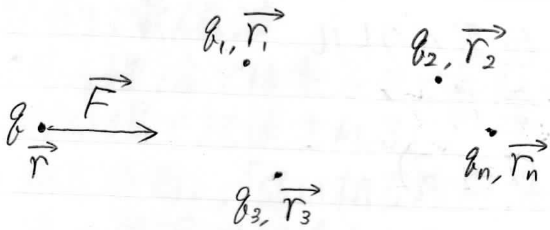
$k=8.98755\ Nm^2/C^2$

光速 $c=2.99792\times10^{8}\ m/s$

$c^2=8.98755\times10^{16}\ m/s$

$\varepsilon=\dfrac{10^7}{4\pi c^2}$　実験値→定義値

重ねあわせの原理



$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r_i})}{|\vec{r}-\vec{r_i}|^3}$$

（$\vec{F_{12}}$ が q_1 や q_2 に比例している
ことも重ねあわせの原理のあらわれ）

電場(electric field, 電界) $\vec{E}(\vec{r})$

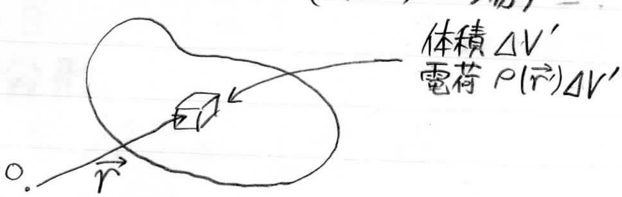
$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r_i})}{|\vec{r}-\vec{r_i}|^3}$$

$\vec{E}(\vec{r}, t)$; $\underbrace{\text{ベクトル}}_{\vec{E}=(E_x, E_y, E_z)}\underbrace{\text{場}}_{\vec{r}, t\text{の関数}}$

電荷の連続的な分布

$\rho(\vec{r})$; 電荷密度(スカラー場)



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{r}-\vec{r_i}}{|\vec{r}-\vec{r_i}|^3} \rho(\vec{r'})\, dV'$$

体積積分(3次元積分)

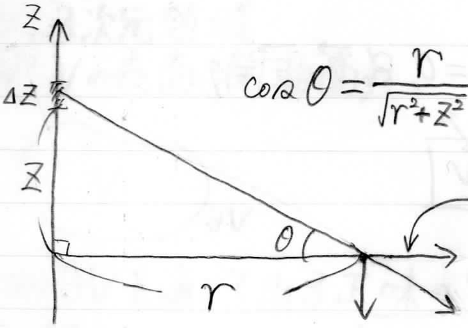
$dV' = dx'dy'dz'$

(デカルト座標)

$E_x(x, y, z)$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{(x-x')\rho(x', y', z')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} dx'dy'dz'$$

例：直線上に一様に分布した
電荷（線密度 λ）



$$\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

対称性より、
電場は動径成分
$E_r(r)$ のみ。

$$\frac{\lambda \Delta z}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2+z^2}\cos\theta$$

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r^2+z^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dz$$

$z = ru$（u：無次元）

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+u^2)^{3/2}}\,du$$

r 依存性は $\frac{1}{r}$。

$u = \tan\theta$ として（← 図の θ と対応）

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = 2.$$

$$\therefore E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}.$$

§1.2 Gaussの法則

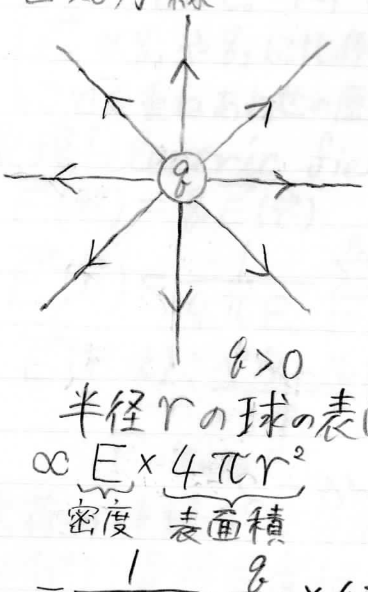
§1の目標

Coulombの法則 ⟷ $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0,\ \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$

↕

$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r}=0,\ \boxed{\varepsilon_0\int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho\, dV}$

電気力線



接線：電場の向き
密度：電場の強さに比例

半径rの球の表面を通る電気力線の総数

$\propto \underbrace{E}_{\text{密度}}\times\underbrace{4\pi r^2}_{\text{表面積}}$

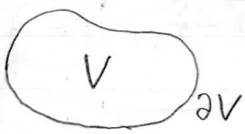
$=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q}{r^2}\times 4\pi r^2=\dfrac{q}{\varepsilon_0}=$一定.

途中で増えたり減ったりしない。

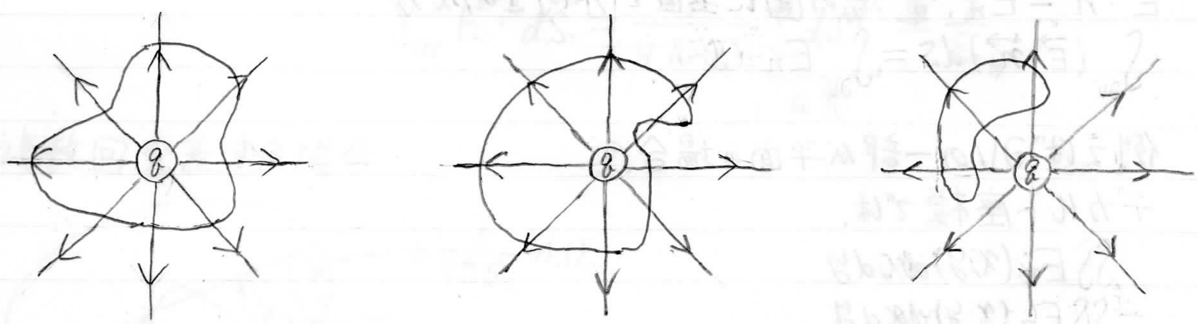
($E\propto\dfrac{1}{r^2}$であることが本質的)

簡単にするため、電荷q ($q>0$)から、
q本の電気力線が出ているとする。

Gaussの法則
(直感的な説明)
V: 3次元領域
∂V: Vの表面(閉曲面)

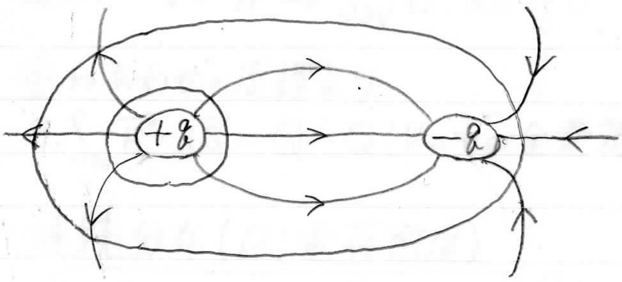


Vから∂Vを通って出る正味の電気力線の数をNとする。
(出る本数)−(入る本数)



$N=q$本　　$N=q$本　　$N=0$本

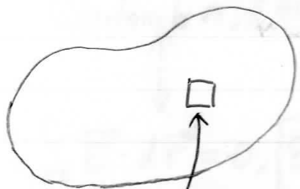
重ねあわせの原理より、
$N=\Sigma$(Vの中にある電荷)



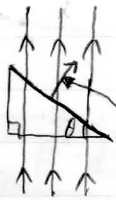
No. 8

Date

電場を使って表す.
↑
電気力線の密度



面積ΔS



$\vec{n}$：法線ベクトル
($\vec{n}$はΔSに垂直で外向き、大きさ1)

電気力線の本数
$\propto |\vec{E}|\Delta S\cos\theta$
$= \vec{E}\cdot\vec{n}\,\Delta S$

$$\sum \vec{E}\cdot\vec{n}\,\Delta S \xrightarrow[\Delta S\to 0]{} \int_{\partial V} (\vec{E}\cdot\vec{n})\,dS$$

面積分

$\vec{E}\cdot\vec{n} = E_n$：電場の面に垂直で外向きの成分

$$\int_{\partial V} (\vec{E}\cdot\vec{n})\,dS = \int_{\partial V} E_n\,dS$$

例えば∂Vの一部が平面の場合、
デカルト座標では、

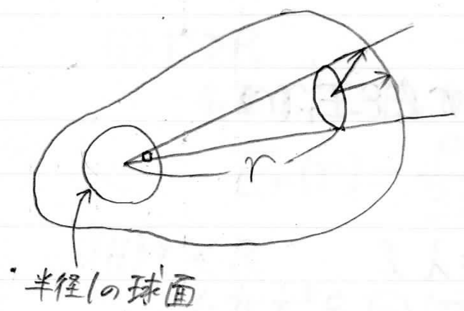
$$\iint E_n(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \iint E_z(x,y)\,dx\,dy$$

$\vec{n}\Delta S = \Delta\vec{S}$：面積要素ベクトル

$$\int_{\partial V} (\vec{E}\cdot\vec{n})\,dS = \int_{\partial V} E_n\,dS$$
$$= \int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

(面積分の色々な表記法)

電荷qの点電荷



$$\vec{E}\cdot\Delta\vec{S} = |\vec{E}|\Delta S\cos\theta$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\Delta S\cos\theta$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Delta\Omega$$

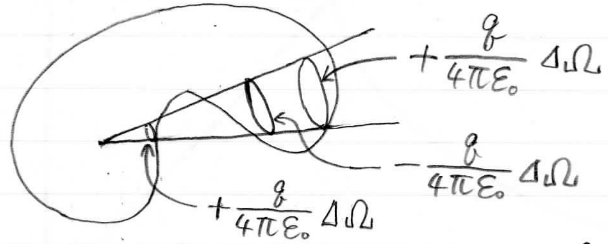
$\Delta\Omega = \frac{1}{r^2}\Delta S\cos\theta$ (無次元量)

半径1の球面から切り取る面積

立体角(単位:steradian)

$$\int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int d\Omega}_{4\pi} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

複数回交差する場合



電荷がVの中 $\Rightarrow \int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

電荷がVの外 $\Rightarrow \int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$

重ねあわせの原理より、

$\varepsilon_0\int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = Q$　Q;Vの中の全電荷

連続分布(ρ;電荷密度)

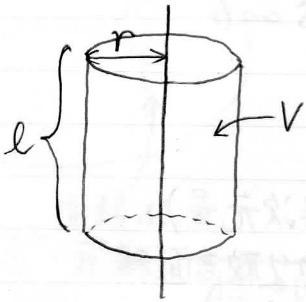
$$\boxed{\varepsilon_0\int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV}$$ Gaussの法則(積分形)

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$; 電束密度

$$\boxed{\int_{\partial V}\vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV}$$

誘電体を考えるときに有用

例1. 直線上に一様に分布した電荷(線密度λ)



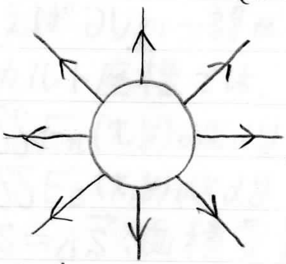
$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r l \varepsilon_0 E_r(r)$$

$$\int_V \rho dV = \lambda l$$

$$2\pi r l \varepsilon_0 E_r(r) = \lambda l$$

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$

例2. 半径Rの球面上に一様に分布した電荷(全電荷Q)



Vを半径rの球とする。

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r(r)$$

(i) $r > R$

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r(r) = Q$$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

(ii) $r < R$

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r(r) = 0$$

$$E_r(r) = 0$$

例3. 半径Rの球内に一様に分布した電荷
(密度ρ)

(i) $r > R$

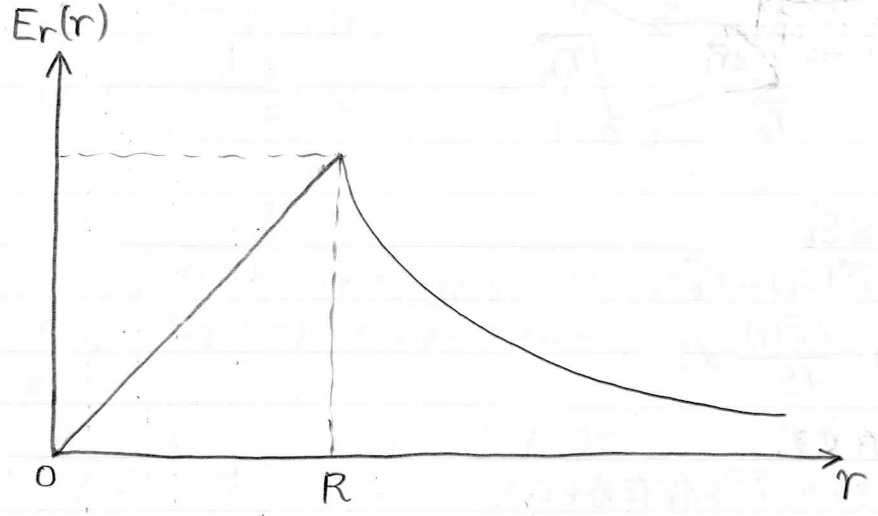
$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r(r) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$E_r(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

(ii) $r < R$

$$4\pi r^2 \varepsilon_0 E_r(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$E_r(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$



No. 12

Date

§1.3 電位

保存力(復習)

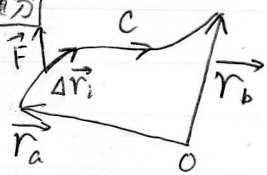
力$\vec{F}$が$\vec{r}$のみの関数の場合を考える。

(速度$\frac{d\vec{r}}{dt}$や時間tにあらわに依存しない)

$\vec{F}(\vec{r})$；ベクトル場

質点が$\vec{r_a}$から$\vec{r_b}$へ経路Cで移動したときに力$\vec{F}(\vec{r})$がした仕事W

$W=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ $\boxed{\text{線積分}}$



$\sum_i \vec{F}(\vec{r_i})\cdot\Delta\vec{r_i}$,

$\Delta\vec{r_i}\longrightarrow 0$

パラメータ表示

C；$\vec{r}(s)$　$s_a\leqq s\leqq s_b$

$\vec{r}(s_a)=\vec{r_a}$, $\vec{r}(s_b)=\vec{r_b}$

$$W=\int_{s_a}^{s_b}\vec{F}(\vec{r}(s))\cdot\frac{d\vec{r}(s)}{ds}ds$$

Wが経路Cに依存せず、$\vec{r_a}$, $\vec{r_b}$のみで決まるとき、$\vec{F}$を保存力という。

このとき、$\vec{F}$はポテンシャル$U(\vec{r})$を用いて

$\vec{F}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\cdot U(\vec{r})$ $\begin{pmatrix}-\mathrm{grad}\,U(\vec{r})\\ -\nabla U(\mathbf{r})\end{pmatrix}$

と書ける。

$U(\vec{r})$：スカラー場 $\xrightarrow[-\vec{\nabla}]{}$ $\vec{F}(\vec{r})$：ベクトル場

Coulomb力

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r_i})}{|\vec{r}-\vec{r_i}|^3}$$

は保存力である。

. $n=1$のとき、

$q_1 = q'$, $\vec{r_1} = \vec{r'}$と書くと、

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q\cdot q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$$

$$= -\vec{\nabla}U(\vec{r})$$

$$U(\vec{r}) = \frac{q\cdot q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} + U_0$$

定数
($\vec{r}$に依らない)

$$= \frac{q\cdot q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$r \underset{\text{定義}}{\equiv} |\vec{r}-\vec{r'}| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

とすると、

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x-x'}{r^3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot f(\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f(\vec{r})\ \frac{\partial}{\partial y}f(\vec{r})\ \frac{\partial}{\partial z}f(\vec{r})\right)$$

(デカルト座標)

$$\boxed{\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = -\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}} \Rightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot U(\vec{r})$$

重ねあわせの原理より、一般の場合は、

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot U(\vec{r})$$

$$U(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} + U_0$$

$\vec{r}$に依らない。
$\vec{r}_i$には依ってよい。

電場$\vec{E}(\vec{r})$も

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\cdot\phi(\vec{r})$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i}^{n}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} + \phi_0$$

定数.

通常$\vec{r}\to\infty$で$\phi(\vec{r})\to 0$となるようにϕ_0をとる。

連続分布の場合には、

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}\,dV'$$

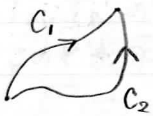
ϕ：電位，静電ポテンシャル，スカラーポテンシャル

単位 $\underset{[J]}{U} = \underset{[C]}{q}\cdot\phi$　　ϕ：$J/C = V$ (ボルト)

電場$\vec{E}$は$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$より、$V/m$

$$\begin{pmatrix} V = m^2\cdot kg\cdot s^{-3}\cdot A^{-1} \\ V/m = m\cdot kg\cdot s^{-3}\cdot A^{-1}\end{pmatrix}$$

$\vec{F}(\vec{r})$が保存力のとき、



$$\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

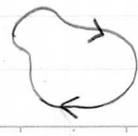
$C = C_1 \underbrace{-C_2}_{\text{逆向きの}C_2}$とすると、

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

一般に、任意の閉じた経路Cに対して、

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

電場についても、任意の閉じた経路Cに対して、 ⇒



このような電気力線はない。

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0}$$

§1.4 Stokesの定理とGaussの定理

目標 $\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0,\ \varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0,\ \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$$

積分に関する数学の定理

(i) 1次元→0次元

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{df(x)}{dx}\, dx = f(x_b) - f(x_a)$$

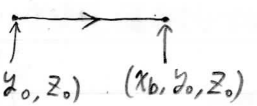
$$\left(\int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = f(x_b,y,z) - f(x_a,y,z)\right)$$

$f(x,y,z)$；スカラー場

$\vec{\nabla} f(x,y,z)$ ベクトル場

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\right)$$

C:

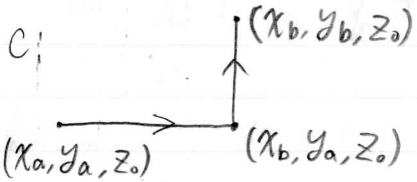


$$\int_C \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0, z_0)\, dx$$

$$= f(x_b, y_0, z_0) - f(x_a, y_0, z_0)$$

C:



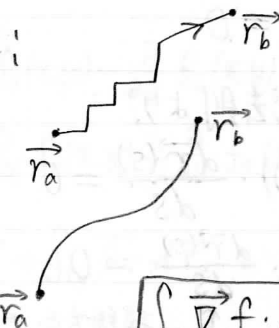
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_a, z_0)\, dx + \int_{y_a}^{y_b} \frac{\partial}{\partial y} f(x_b, y, z_0)\, dy$$

$$= \cancel{f(x_b, y_a, z_0)} - f(x_a, y_a, z_0) + f(x_b, y_b, z_0) - \cancel{f(x_a, y_a, z_0)}$$

$$= f(x_b, y_b, z_0) - f(x_a, y_a, z_0)$$

C:



$$\boxed{\int_C \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r} = f(\vec{r}_b) - f(\vec{r}_a)}$$

始点と終点だけで決まり、
途中の経路には
依存しない。

Date

例1. $\vec{F}(\vec{r})$；保存力

$U(\vec{r})$；ポテンシャル

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{\nabla} U\cdot d\vec{r}$$

$$= -U(\vec{r_b}) + U(\vec{r_a})$$

例2. $\vec{E}(\vec{r})$；電場

$\phi(\vec{r})$；電位

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r}$$

$$= -\phi(\vec{r_b}) + \phi(\vec{r_a})$$

等電位面；ϕの値が一定の面

等電位面内の経路Cを

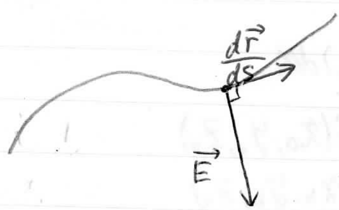
$\vec{r}(s)$のようにパラメータ表示すると、

$$\frac{d\phi(\vec{r}(s))}{ds} = 0$$

合成微分の法則より、

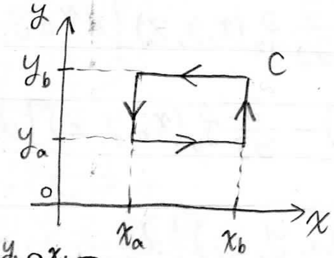
$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}(s))\cdot\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = 0$$

$$-\vec{E}(\vec{r}(s))\cdot\underbrace{\frac{d\vec{r}(s)}{ds}}_{\text{接線方向}} = 0$$



∴電場は等電位面に直交する。

(ii) 2次元 → 1次元



$$\int_{y_a}^{y_b}\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)\right]dx\,dy$$

← 2次元積分

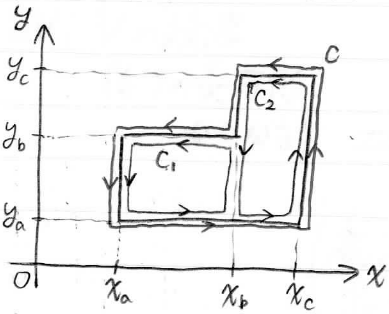
$$=\int_{y_a}^{y_b}\left[f_y(x_b,y)-f_y(x_a,y)\right]dy$$
$$-\int_{x_a}^{x_b}\left[f_x(x,y_b)-f_x(x,y_a)\right]dx$$
$$=\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

← 1次元積分

$$\vec{f}(\vec{r})=\left(f_x(x,y),\ f_y(x,y)\right)$$

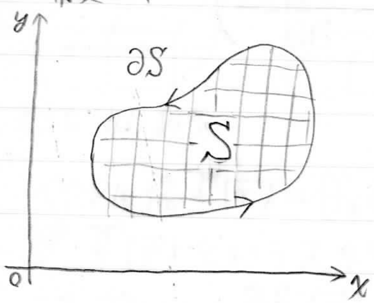
2次元のベクトル場

x成分, 偏微分ではない



$$\int_{y_a}^{y_b}\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)\right]dx\,dy$$
$$+\int_{y_a}^{y_c}\int_{x_b}^{x_c}\left[\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)\right]dx\,dy$$
$$=\int_{C_1}\vec{f}\cdot d\vec{r}+\int_{C_2}\vec{f}\cdot d\vec{r}$$
$$=\int_C\vec{f}\cdot d\vec{r}$$

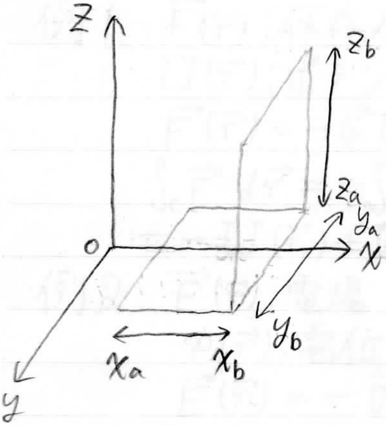
一般に,



$$\int_S\left[\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)\right]dx\,dy$$
$$=\int_{\partial S}\vec{f}\cdot d\vec{r}$$

S : 2次元領域

∂S : Sの境界(閉曲線)



$$\int_{y_a}^{y_b}\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y,z_a)-\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y,z_a)\right]dx\,dy$$

$$-\int_{z_a}^{z_b}\int_{y_a}^{y_b}\left[\frac{\partial}{\partial y}f_z(x_b,y,z)-\frac{\partial}{\partial z}f_y(x_b,y,z)\right]dy\,dz$$

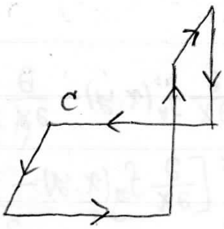
$$=\int_{y_a}^{y_b}\left[\cancel{f_y(x_b,y,z_a)}-f_y(x_a,y,z_a)\right]dy$$

$$-\int_{x_a}^{x_b}\left[f_x(x,y_b,z_a)-f_x(x,y_a,z_a)\right]dx$$

$$-\int_{z_a}^{z_b}\left[f_z(x_b,y_b,z)-f_z(x_b,y_a,z)\ dz\right.$$

$$+\int_{y_a}^{y_b}\left[f_y(x_b,y,z_b)-\cancel{f_y(x_b,y,z_a)}\right]dy$$

$$=\int_C\vec{f}\cdot d\vec{r}$$



ベクトル場$\vec{f}(\vec{r})=(f_x(\vec{r}),f_y(\vec{r}),f_z(\vec{r}))$

に対して、$\vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{r})$というベクトル場を、

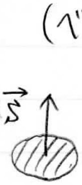
$$\vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{r})$$

$$\equiv\left(\frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial y}-\frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial z},\ \frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial z}-\frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial x},\ \frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial x}-\frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial y}\right)$$

のように定義する。

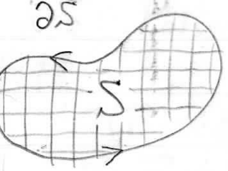
(ベクトル場の回転, rot $\vec{f}(\vec{r})$, curl $\vec{f}(\vec{r})$)

$\Delta\vec{S}$



境界に向きがついた微小面積要素

$|\Delta\vec{S}|$=面積，右ネジの進む向き



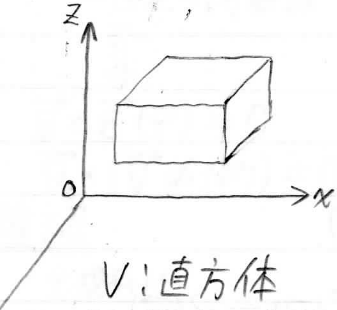
$$\sum_i (\vec{\nabla}\times\vec{f})\cdot\Delta\vec{S} \xrightarrow[\Delta S\to 0]{} \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{f})\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\int_S (\vec{\nabla}\times\vec{f})\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{f}\cdot d\vec{r}}$$

Stokesの定理

∂Sが同じならば
Sの形に依存しない。

S：3次元中の
2次元領域
S：Sの境界(向きつき)
)3次元→2次元



V：直方体
∂V：Vの境界
(6つの長方形
からなる)

$$\int_{z_a}^{z_b}\int_{y_a}^{y_b}\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{\partial}{\partial x} f_x(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y} f_y(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z} f_z(x,y,z)\right] dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{z_a}^{z_b}\int_{y_a}^{y_b}\left[f_x(x_b,y,z) - f_x(x_a,y,z)\right] dy\,dz$$

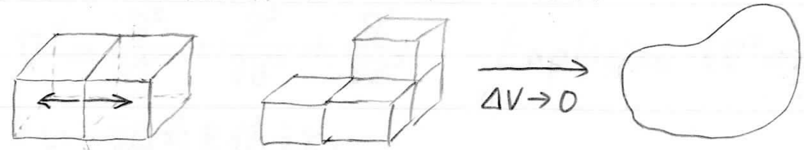
$$+ \int_{x_a}^{x_b}\int_{z_a}^{z_b}\left[f_y(x,y_b,z) - f_y(x,y_a,z)\right] dz\,dx$$

$$+ \int_{y_a}^{y_b}\int_{x_a}^{x_b}\left[f_z(x,y,z_b) - f_z(x,y,z_a)\right] dx\,dy$$

$$= \int_{\partial V} \vec{f}\cdot d\vec{S}$$

(高次元への拡張では、
$f_x \to f_{yz},\ f_y \to f_{zx},\ f_z \to f_{xy}$)

任意の3次元領域Vに拡張できる。



打ち消しあう

ベクトル場 $\vec{f}(\vec{r}) = (f_x(\vec{r}), f_y(\vec{r}), f_z(\vec{r}))$ に対して、
$\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{r})$ というスカラー場を

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{r}) \equiv \frac{\partial f_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial f_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial f_z(\vec{r})}{\partial z}$$

(ベクトル場の発散，$\mathrm{div}\,\vec{f}(\vec{r})$)

$$\boxed{\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{f})\,dV = \int_{\partial V} \vec{f}\cdot d\vec{S}}$$

Gaussの定理

Date

まとめ

∂Cでの0次元積分

$$\int_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}_b) - f(\vec{r}_a)$$

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{f}) dV = \int_{\partial V} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

n次元中のm次元積分と、その境界での積分の関係に拡張可能。
$(1 \leqq m \leqq n)$

$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0.$$

$$\varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \int_V \rho dV \Leftrightarrow \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

保存力の判定条件にも使うことができる.

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$\vec{F}(\vec{r})$は保存力

§ 1.5 Poisson方程式

目標

$\rho(\vec{r})$が与えられたとき、

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0,\ \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$

を満たす$\vec{E}$を求める。

Coulombの法則が再現できるか？

・ $\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r}=0 \Leftrightarrow \vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\cdot\phi(\vec{r})$

C：任意の閉曲線

$\Updownarrow$

$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})=0$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi(\vec{r}))=0$

<u>確認</u>

x成分は、

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}=0.$$

$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$ ならば

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$は満たされている。

$$-\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\phi)=\rho$$

$$-\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=\rho$$

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\qquad \text{Laplacian}\ (\nabla^2=\Delta)$$

という記号を使うと、

$$\boxed{\nabla^2\phi(\vec{r})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})}\quad \text{Poisson方程式}$$

電荷のない真空の領域では、

$$\boxed{\nabla^2\phi(\vec{r})=0}\quad \text{Laplace方程式}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|}$$ のときの

$\nabla^2\phi(\vec{r})$ の計算 $(\vec{r} \neq \vec{0})$

$r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^3}$$

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}\right] = 0$$

$$\therefore \nabla^2\phi(\vec{r}) = 0 \ (\vec{r} \neq \vec{0})$$

Poisson方程式：非同次(非斉次方程式)
Laplace方程式：同次(斉次)方程式
Poisson方程式の一般解
＝特解＋Laplace方程式の一般解
境界条件によってひとつの解に決まる。

<u>比較</u>

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -mg - kv(t)$$ (非同次)

の一般解は、

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + C\cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v(t) = \underbrace{-\frac{mg}{k}}_{\text{特解}} + \underbrace{C\ e^{-\frac{k}{m}t}}$$ (C：積分定数)

特解

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -kv(t)$$
(同次)
の一般解

初期条件(例えば $v(0)=0$ で決まる)
境界条件に対応

境界条件

通常は $\vec{r}\to\infty$ で $\phi(\vec{r})\to 0$ という境界条件を課す。

(例　半径 R の球内に一様に分布した電荷

$$\rho(\vec{r})=\begin{cases}\rho & |\vec{r}|\leqq R\\ 0 & |\vec{r}|>R\end{cases}$$
)

ϕ は $r\equiv|\vec{r}|$ のみの関数 $\phi(r)$

$$\frac{\partial\phi(r)}{\partial x}=\frac{d\phi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{d\phi(r)}{dr}$$

$$\frac{\partial^2\phi(r)}{\partial x^2}=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\frac{d\phi(r)}{dr}+\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}$$

$$\nabla^2\phi(r)=\frac{2}{r}\frac{d\phi(r)}{dr}+\frac{d^2\phi(r)}{dr^2}$$

$$=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[r\phi(r)]$$

(i) $r>R$ のとき

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[r\phi(r)]=0$$

$$r\phi(r)=C_1r+C_2$$

$$\phi(r)=C_1+\frac{C_2}{r}$$

$r\to\infty$ で $\phi(r)\to 0$ より、$C_1=0$.

$$\phi(r)=\frac{C_2}{r}$$

(ii) $r<R$ のとき

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[r\phi(r)]=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$r\phi(r)=-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^3+C_3r+C_4$$

$$\phi(r)=-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2+C_3+\frac{C_4}{r}$$

電荷密度が有限のとき、静電場は連続.

$\Rightarrow \frac{d\phi(r)}{dr}$, $\phi(r)$ は連続

$$\frac{d\phi(r)}{dr}=\begin{cases}-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r-\frac{C_4}{r^2} & (r<R)\\ -\frac{C_2}{r^2} & (r>R)\end{cases}$$

$r=0$で連続 $\Rightarrow C_4=0$

$r=R$で連続

$$\begin{cases} -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}R = -\dfrac{C_2}{R^2} \\ -\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_3 = \dfrac{C_2}{R} \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0},\quad C_3 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 & (r \leqq R) \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (r > R) \end{cases}$$

電場の動径成分$E_r(r)$は,

$$E_r(r) = -\frac{d\phi(r)}{dr} = \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}r & (r \leqq R) \\ -\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (r > R) \end{cases}$$

一般に

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

境界条件$\vec{r}\to\infty$のとき,
$\phi(\vec{r})\to 0$を満たす.

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

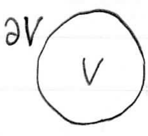
の唯一の解である。

解の一意性

$\rho(\vec{r})$と境界条件が与えられたとき,

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

の解はただ1つに決まる.



V: 3次元領域
(例えば十分に大きい球)
∂V: Vの境界

境界条件

∂Vで$\phi(\vec{r}) = \phi_0$ (定数)
(境界は複数あってもよい。異なる境界で異なるϕ_0の値でもよい。)

2つの解$\phi_1(\vec{r}), \phi_2(\vec{r})$が存在したとする。

$$\nabla^2\phi_1(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$
$$\nabla^2\phi_2(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

∂Vで$\phi_1(\vec{r}) = \phi_0$
$\phi_2(\vec{r}) = \phi_0$

$\varphi(\vec{r}) \equiv \phi_1(\vec{r}) - \phi_2(\vec{r})$は

$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = 0$

∂Vで$\varphi(\vec{r}) = 0$

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \int_V \varphi\nabla^2\varphi\, dV = 0$$

部分積分

$$\vec{\nabla}\cdot(f(\vec{r})\vec{\nabla}g(\vec{r}))$$
$$= \vec{\nabla}f(\vec{r})\cdot\vec{\nabla}g(\vec{r}) + f(\vec{r})\nabla^2 g(\vec{r})$$

($f(\vec{r}), g(\vec{r})$; スカラー場)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \cdots$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \cdots$$

$f = g = \varphi$として、

$$\int_V \varphi\nabla^2\varphi\, dV$$
$$= \int_V \vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{\nabla}\varphi)\, dV - \int_V |\vec{\nabla}\varphi|^2 dV$$
$$= \underbrace{\int_{\partial V}\varphi\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{S}}_{=0} - \int_V |\vec{\nabla}\varphi|^2 dV = 0$$

Gaussの定理

$\leftarrow$ ∂Vで$\varphi = 0$

$|\vec{\nabla}\varphi|^2 \geqq 0, \int_V |\vec{\nabla}\varphi|^2 dV = 0$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = 0$

$\varphi(\vec{r})$が一定. ∂Vで$\varphi = 0$より、$\varphi(\vec{r}) = 0$ $\quad\therefore \phi_1(\vec{r}) = \phi_2(\vec{r})$ //

Coulombの法則 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Coulombの法則

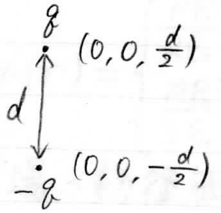
$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Uparrow$$

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0,\ \varepsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0,\ \varepsilon_0 \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \iff \nabla^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho,\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

§1.6 電気双極子



$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{d}{2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{d}{2})^2}}\right]$$

遠方では、$d \ll r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ より、

$$\left[x^2+y^2+(z\pm\frac{d}{2})^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[x^2+y^2+z^2 \pm zd + \frac{d^2}{4}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 \pm \frac{zd}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

order

$$= \frac{1}{r}\left[1 \pm \frac{zd}{r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1 \mp \frac{zd}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right]$$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + O(x^2)$ Taylor展開

$$\therefore\ \phi(x,y,z) \cong \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}\ (d \ll r)$$

電気双極子モーメント $\vec{p}$ を

向き：$-q \to q$

$|\vec{p}| = q \times (q$ と $-q$ のキョリ$)$

のように定義すると、一般に

$$\phi(\vec{r}) \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\phi(\vec{r})=\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}$$ のとき、

$\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$は、

$$\vec{E}(\vec{r})=\left(\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zx}{r^5},\ \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zy}{r^5},\ \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3z^2-r^2}{r^5}\right)$$

$$\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$ のとき、

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{P}\cdot\vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^5}-\frac{\vec{P}}{|\vec{r}|^3}\right)$$

多重極展開

$$\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

遠方では$|\vec{r}|\gg|\vec{r}'|$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=(|\vec{r}|^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'+|\vec{r}'|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}|}\left(1-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|^2}+\frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq\frac{1}{|\vec{r}|}\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|^2}\right)$$

$$=\frac{1}{|\vec{r}|}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|^3}$$

$$\phi(\vec{r})\simeq\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}|}dV'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|^3}\rho(\vec{r}')dV'+\cdots$$

$$=\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|}}_{\uparrow\ \frac{1}{r}}+\cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}+\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}_{\uparrow\ \frac{1}{r^2}}+\underbrace{\cdots}_{\uparrow\ \frac{1}{r^3},\frac{1}{r^4},\cdots}$$

$$Q\equiv\int\rho(\vec{r}')dV'$$

全電荷

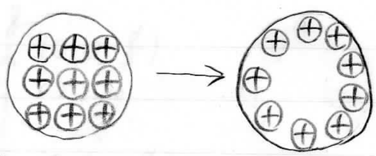
$$\vec{P}\equiv\int\vec{r}'\rho(\vec{r}')dV'$$

双極子モーメント

§1.7 導体

導体(conductor)
⇒電気をよく伝える。
絶縁体(insulator)
⇒電気をほとんど伝えない。

導体中に電場があると、
電荷が移動する。



最終的な電荷分布

導体内部

$$\vec{E}=0 \Rightarrow \begin{cases} \phi \text{ は一定} \\ \text{Gauss の法則より、} \rho=0 \end{cases}$$

導体表面

電荷が存在できる

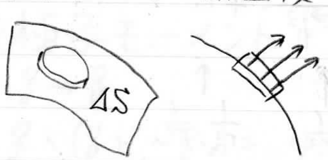
電場の表面に接する方向の成分は0。

ϕは表面でも一定

導体表面は等電位面で、
電場は表面に垂直。

$E_n(\vec{r})$；電場の表面に垂直な成分。
(外向きを正)

$\sigma(\vec{r})$；電荷の面密度



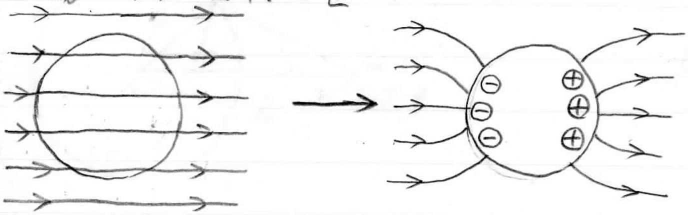
Gaussの法則より、

$$\varepsilon_0 E_n(\vec{r})\Delta S=\rho(\vec{r})\Delta S$$

$$E_n(\vec{r})=\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\vec{r})$$

静電誘導

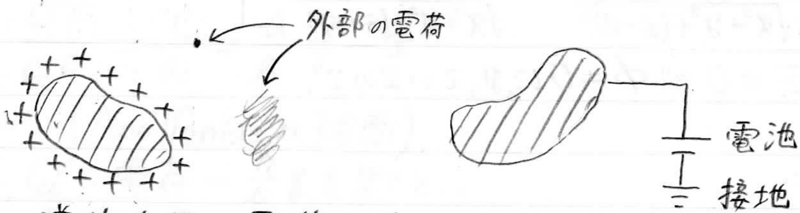
電場の中に電荷を置く.



表面に電荷が分布

内部は $\vec{E}=0$

導体のまわりの静電場



導体表面の電荷分布は事前には分からない.

分かっていること

導体内部では $\vec{E}=0$

それぞれの導体表面で ϕ は一定.

$\vec{r}\to\infty$ で $\phi(\vec{r})\to 0$,

i番目の導体表面で $\phi=\phi_i$ という

境界条件のもとで導体外部で

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$$

外部の電荷分布

を満たす解が求まればよい.

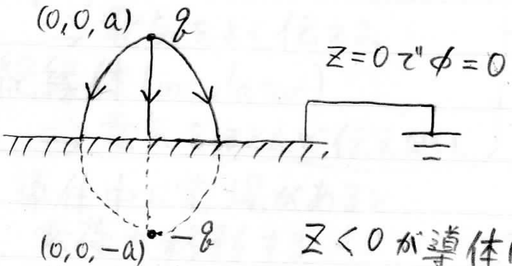
解の一意性の証明が適用できるので,

何らかの方法で解が見つかればそれが唯一の解

Date

鏡像法

例1.



$z<0$が導体内部

導体をなくして$(0,0,-a)$に$-q$の点電荷を置くと、

$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right]$$

無限遠で$\phi=0$, $z=0$で$\phi=0$になっているので、

この$\phi\,(z>0)$が解

E_zは、

$$E_z=-\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}-\frac{z+a}{[x^2+y^2+(z+a)^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

導体表面$(z=0)$では、

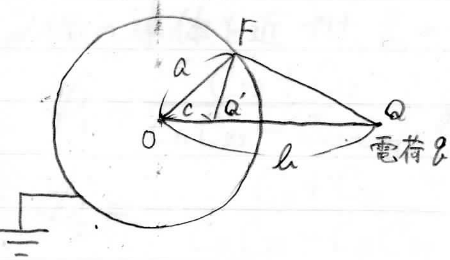
$$E_z(x,y,0)=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

表面電荷の面密度$\sigma(x,y)$は、

$$\sigma(x,y)=\varepsilon_0 E_z(x,y,0)$$

$$=-\frac{q}{2\pi}\frac{a}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

例2. 導体球と点電荷

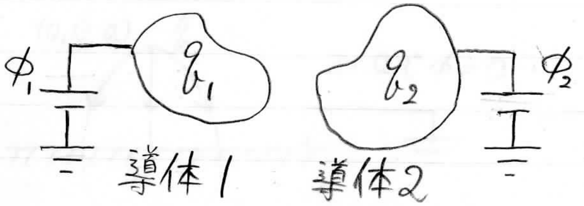


Q'を$l:a=a:c$を満たすようにとる.
球面上の~~任意~~の任意の点Fに対し,
$\triangle QOF \propto \triangle FOQ'$
$$\frac{Q'F}{QF}=\frac{c}{a}=\frac{a}{l}=一定$$
(Apolloniusの球面)
Q'に電荷$-\frac{a}{l}q$を置くと,
導体表面で$\phi=0$になる。
⇒解
導体球の内部を空洞にしても
外部の電場は同じ.
内部の電場はゼロ. 静電遮蔽

電気容量
電荷qをもつ半径Rの孤立した導体球の電位は,
中心に点電荷があるとした場合と外部の電場は同じだから,
$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$
一般に孤立導体では, $\phi \propto q$.
ϕをλ倍
→外部の$\vec{E}$をλ倍したものが解
→qもλ倍(Gaussの法則)
$q=C\phi$ C: 電気容量(導体の形状で決まる)
(単位: C/V = F(ファラッド))

Date

導体が2個の系



ϕ_1, ϕ_2 を与えたときの q_1, q_2 を考える。

(i) $\phi_1 \neq 0,\ \phi_2 = 0$ のとき、

孤立導体のときと同じ理由で

$q_1 \propto \phi_1,\ q_2 \propto \phi_1$

$q_1 = C_{11}\phi_1,\ q_2 = C_{21}\phi_1$

(ii) $\phi_1 = 0,\ \phi_2 \neq 0$ のとき、

$q_1 = C_{12}\phi_2,\ q_2 = C_{22}\phi_2$

(多重極展開の正しい式

$$\phi(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}|}dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{|\vec{r}|^3}\rho(\vec{r}')dV' + \cdots$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \cdots$$
)

電荷は $q_1 = C_{11}\phi_1 + C_{12}\phi_2$

$q_2 = C_{21}\phi_1 + C_{22}\phi_2$

3個以上の導体にも拡張できる。

一般に $C_{12} = C_{21}$

相反定理(証明省略)

コンデンサー

2個の導体を近づけ、$q_1 = q$, $q_2 = -q$ としたもの。このとき、

$$\phi_1 = \frac{C_{22} + C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} q$$

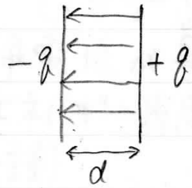
$$\phi_2 = -\frac{C_{11} + C_{21}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} q$$

$$\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2 \propto q$$

$$q = C\Delta\phi$$

C：コンデンサーの電気容量

例1 平行板コンデンサー

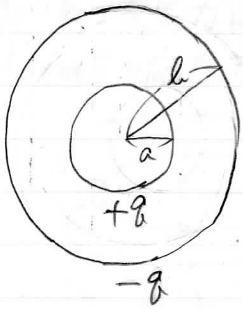


面積A

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \rightarrow \Delta\phi = Ed = \frac{d}{\varepsilon_0 A} q$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

例2 同心球

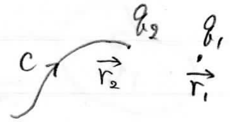


$$\Delta\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

§1.8 静電エネルギー

2個の点電荷　q_2を無限遠から$\vec{r_2}$に運ぶときに必要な仕事.



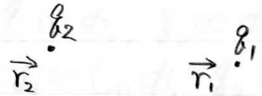
$$\vec{F_{21}}(\vec{r}) = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r_1}}{|\vec{r}-\vec{r_1}|^3}$$

q_1がq_2に及ぼす力

$$W_2 = -\int_C \vec{F_{21}}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$= \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r_2}-\vec{r_1}|}$$

3個の点電荷



さらにq_3を$\vec{r_3}$に運ぶ

$$W_3 = \frac{q_3 q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r_3}-\vec{r_1}|} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r_3}-\vec{r_2}|}$$

合計 $W_2 + W_3$

n個の点電荷の系の静電エネルギー

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\frac{q_i q_j}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{q_i q_j}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|}$$

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}$$

$i=j$はさけて $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}$

q_i以外が$\vec{r_i}$に作る電位ϕ_iは.

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{q_j}{|\vec{r_i}-\vec{r_j}|}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \phi_i$$

連続分布

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\iint\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV\,dV'$$

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\,\phi(\vec{r})\,dV$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$より、

$$U = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \phi \nabla^2 \phi \, dV$$

$$\underset{\text{以前の部分積分}}{=} -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\partial V} \phi \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{S} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V |\vec{\nabla}\phi|^2 dV$$

多重極展開より、
遠方で$\phi \sim \frac{1}{r}$, $\vec{\nabla}\phi \sim \frac{1}{r^2}$

表面積$4\pi r^2$

$$\int_{\partial V} \phi \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{S} \to 0$$

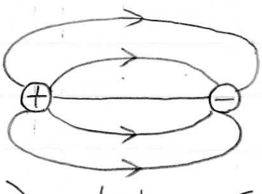
$\vec{\nabla}\phi = -\vec{E}$より、

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V |\vec{E}|^2 dV$$

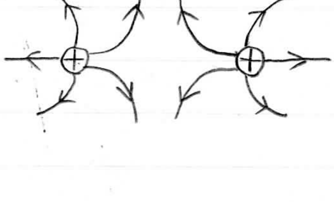
静電場が$\frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}(\vec{r})|^2$という
エネルギー密度を持つとも解釈できる。

(余談)

さらに電気力線が力を及ぼし合っているとも
解釈できる。(説明省略)
電気力線は縮もうとする(張力)
隣りあう電気力線は押し合う(圧力)
Maxwellの応力テンソル(stress tensor)



遠隔作用
↓
近接作用



Faraday

一様に帯電した球の静電エネルギー

$$\rho(\vec{r})=\begin{cases}\rho & (|\vec{r}|\leqq R)\\ 0 & (|\vec{r}|>R)\end{cases}$$

$$\phi(\vec{r})=\begin{cases}\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} & (r\leqq R)\\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (r>R)\end{cases}$$

$$U=\frac{1}{2}\int\rho\phi\,dV$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty 4\pi r^2\rho(r)\phi(r)\,dr$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^R 4\pi r^2\rho\left(\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}-\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0}\right)dr$$
$$=\frac{4\pi\rho^2R^5}{15\varepsilon_0}$$ 有限

$q=\frac{4}{3}\pi\rho R^3$ を用いると、
↑全電荷

$$U=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

点電荷の極限
(q を一定にして $R\to 0$) で発展
→無限大の自己エネルギー
電子場の理論を使って記述

孤立導体の静電エネルギー

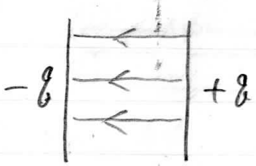
$$U=\frac{1}{2}\int\rho(\vec{r})\phi(\vec{r})\,dV$$
↑一定

$$=\frac{1}{2}\phi\underbrace{\int\rho(\vec{r})\,dV}_{\text{全電荷}}$$

$U=\frac{1}{2}q\phi$, $q=C\phi$ より、

$$U=\frac{1}{2}C\phi^2=\frac{q^2}{2C}$$

平行板コンデンサーの静電エネルギー



面積 A

$\phi_2 \qquad \phi_1 \qquad \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$

$$U = \frac{1}{2} q \phi_1 + \frac{1}{2}(-q)\phi_2 = \frac{1}{2} q \Delta\phi$$

$q = C\Delta\phi$ より、

$$U = \frac{1}{2} C \Delta\phi^2 = \frac{q^2}{2C}$$

$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ より、$U = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 A}$

$E = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$ より、

$$\underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}_{\text{エネルギー密度}} \cdot \underbrace{Ad}_{\text{体積}} = \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 A}$$

極板間にはたらく力

$$F = -\frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

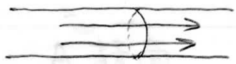
近づける方向(引力)

Date

§2 定常電流

§2.1 電荷の保存則

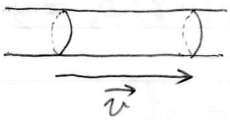
電流…単位時間に流れる電荷の量
[A]　[C/s]

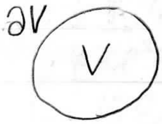


電流密度：$\vec{j}(\vec{r},t)$ (ベクトル場)
時間

単位面積あたりの電流

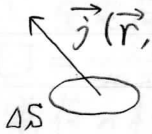
電荷密度 ρ の電荷が速度 $\vec{v}$ で動くとき、$\vec{j}=\rho\vec{v}$

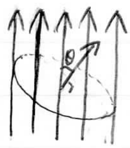




V：3次元領域
∂V：Vの境界

単位時間あたりにVから出ていく正味の電荷





$$|\vec{j}(\vec{r},t)|\Delta S\cos\theta=\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\Delta\vec{S}$$
面積要素ベクトル

$$\int_{\partial V}\vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$$

電荷の保存則

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\vec{r},t)\,dV=\int_{\partial V}\vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}$$

Gaussの定理より、

$$\int_{\partial V}\vec{j}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S}=\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)\,dV$$

$$\int_V\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)\right]dV=0$$

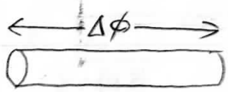
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)=0$$

電荷の保存則の微分形
連続の方程式

定常電流

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{j}(\vec{r},t)=0 & \vec{j}(\vec{r})\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)=0\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})=0\end{cases}$$

§2.2 Ohmの法則



$\Delta\phi$：電位差
I：電流
R：電気抵抗
（単位 $\Omega = V/A$）
l：導線の長さ
S：導線の断面積
σ：電気伝導度（物質・温度などで決める）
$[\Omega^{-1}\cdot m^{-1}]$

$$I = \frac{\Delta\phi}{R}$$

$$R = \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{l}{S}$$

$$\underbrace{\frac{I}{S}}_{\text{電流密度}} = \sigma \underbrace{\frac{\Delta\phi}{l}}_{\text{電場}}$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r})$$

近似的に成り立つ法則
（Gaussの法則などのMaxwell方程式は厳密に成り立つと考えられる）

§2.3 Joule熱

電荷qは電場$\vec{E}$から力を受ける。

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

一方Ohmの法則では、

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}$$

電荷の平均的な速度は一定.

※雨は重力と空気抵抗がつりあって
ほぼ等速度で落下.
重力のする仕事→熱エネルギーへ

電場が電荷にする仕事率

$$q\vec{E}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

単位体積あたりの仕事率

$$\rho\vec{E}\cdot\vec{v}=\vec{j}\cdot\vec{E}$$

→熱エネルギーへ Joule熱

Ohmの法則より、

$$\vec{j}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r})=\sigma|\vec{E}(\vec{r})|^2=\frac{1}{\sigma}|\vec{j}(\vec{r})|^2$$

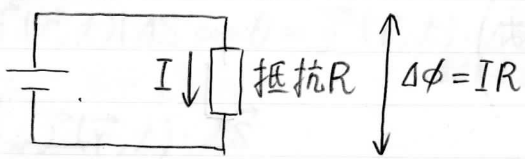
長さl, 断面積Sの導線での仕事率

$$S\cdot\vec{j}(\vec{r})\cdot l\vec{E}(\vec{r})=\frac{S\sigma}{l}|l\vec{E}(\vec{r})|^2=\frac{l}{S\sigma}|S\vec{j}(\vec{r})|^2$$

$$I\Delta\phi \quad =\frac{\Delta\phi^2}{R} \quad =RI^2$$

§2.4 Kirchhoffの法則

電気回路



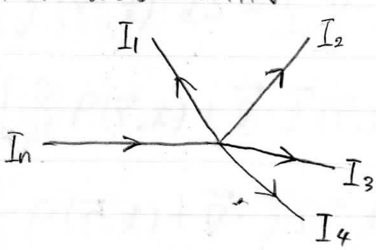
定常電流→電池など電位差を生成するものが必要

起電力(単位はV)

(化学反応
光や熱のエネルギー)

Kirchhoffの法則

(1)



$$\sum_{i=1}^{n}I_i=0$$

⇑

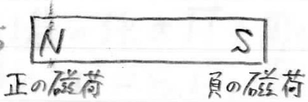
電荷の保存則

(2) 任意の閉回路

$$\Sigma(\text{起電力})=\Sigma I_i R_i$$

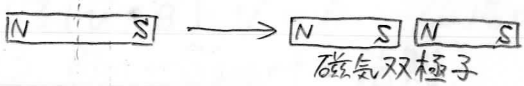
3 静磁場

3.1 電流間に働く力

磁石


磁荷間の力　Coulombの法則

電荷との違い；磁荷は単独では存在しない。

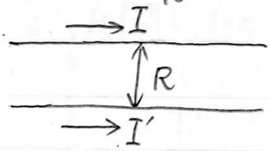


電流に近づけると　　Ørsted
磁針がふれる　　Oersted

電流間に力がはたらく… Ampére

平行電流にはたらく単位長さあたりの力の大きさf

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{II'}{R}$$



同じ向きのとき
引力
逆向きのとき
斥力

1Aの定義 ⇒ $\mu_0 = 4\pi\times10^{7}\ (\mathrm{N/A^2})$
真空の透磁率

§1では電荷間の力

↓

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\rho(\vec{r}')\,dV'$$

↓

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\varepsilon_0\int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV$$

↓

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0,\ \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho$$

↓

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi,\ \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

§3のあらすじ：電流間の力

$\downarrow$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV'$$

$\downarrow$

$$\int_{\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$\downarrow$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$\downarrow$

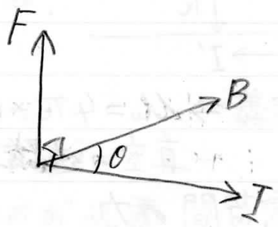
$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

§3.2 ローレンツ力

磁場Bが長さlの電流Iに及ぼす力

$$F = IBl\sin\theta$$



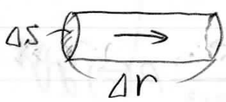
電流要素$I\Delta\vec{r}$に働く力$\Delta\vec{F}$は、

$$\Delta\vec{F} = I\Delta\vec{r}\times\vec{B}$$

単位体積あたりの力$\vec{f}$は、

$$\vec{f} = \vec{j}\times\vec{B}$$

$$I\Delta\vec{r} = \vec{j}\,\underbrace{\Delta S\Delta r}_{(\text{体積})}$$



$\vec{j} = \rho\vec{v}$より、

$$\vec{f} = \rho\vec{v}\times\vec{B}$$

速度$\vec{v}$で運動する電荷にはたらく力は $\underbrace{\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}}_{\text{ローレンツ力}}$

この式で$\vec{B}$を定義する。

単位 T(テスラ) $= NC^{-1}\cdot m^{-1}\cdot s$

$= kg\cdot s^{-2}\cdot A^{-1}$

$\vec{B}$…磁束密度といわれる。

$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$ で定義される。 → $\vec{B}$ を磁場と呼ぶことにする

磁場の強さ $\vec{H}$ も用いられる。

(比較：$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$，電束密度)

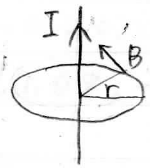
$\vec{E}$ と $\vec{B}$ が同時にある時には，

$$\begin{cases} \vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \\ q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

磁場は仕事をしない。

3.3 Biot−Savart の法則

直線電流がつくる磁場

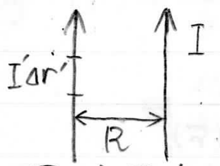


I：電流

$B(r)$：磁場の大きさ

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

平行電流間に働く力を再現



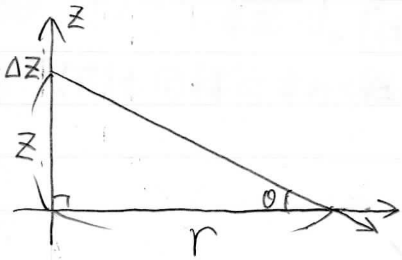
$$|\Delta\vec{f}| = I'|\Delta\vec{r}'|B(R)$$

$$\frac{|\Delta\vec{f}|}{|\Delta\vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I \cdot I'}{R}$$

電流要素 $I\Delta\vec{r}$ がつくる磁場 $\vec{B}$ で考える。

直線上に一様に分布した電荷(線密度 λ)

がつくる電場

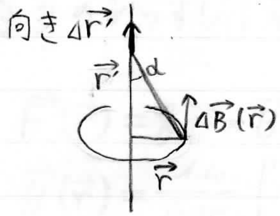


$$\frac{\lambda \Delta Z}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2+Z^2} \cdot \underbrace{\frac{r}{\sqrt{r^2+Z^2}}}_{\cos\theta}$$

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2+Z^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+Z^2}} dZ = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

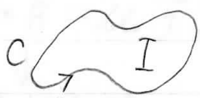
$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta Z}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2+Z^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+Z^2}}$$ とすると，

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2+Z^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+Z^2}} dZ = \underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}}$$



$$|\vec{r}| = r,\ |\vec{r}'| = z$$
$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2+z^2}$$
$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$$
$$|\Delta\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')| = \Delta z\cdot\sqrt{r^2+z^2}\sin\alpha \quad = \Delta z\cdot r$$
$$\Delta\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

・ ―Biot-Savartの法則―

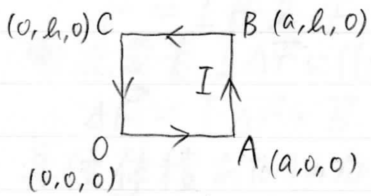


$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_C \frac{d\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

連続分布 $\quad I\Delta\vec{r}' = \vec{j}\,\Delta S'\Delta r' = \vec{j}\,\Delta V'$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{\vec{j}(\vec{r})\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dV'$$

§3.4 磁気双極子



電流 I が $\vec{r} = (x, y, z)$ につくる磁場 $\vec{B}(\vec{r})$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}^{OA}(\vec{r}) + \vec{B}^{AB}(\vec{r}) + \vec{B}^{BC}(\vec{r}) + \vec{B}^{CO}(\vec{r})$$

OA $(x', 0, 0)$, $0 \leqq x' \leqq a$
$$\Delta\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')$$
$$= (\Delta x', 0, 0)\times(x-x', y, z)$$
$$= (0, -\Delta x' z, \Delta x' y)$$

$$B_x^{OA}(\vec{r}) = 0.$$
$$B_y^{OA}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \frac{z}{[(x-x')^2+y^2+z^2]^{3/2}}\,dx'$$
$$B_z^{OA}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \frac{y}{[(x-x')^2+y^2+z^2]^{3/2}}\,dx'$$

$\vec{B}^{AB}(\vec{r})$ も同様に求められる。

$\vec{B}^{BC}(\vec{r})$は符号に注意するために.

$BC: x'(s) = a(1-s)$, $y'(s) = l$, $z'(s) = 0$ $(0 \leqq s \leqq 1)$

とパラメータ表示して,

$$\vec{B}^{BC}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^1 \frac{\frac{d\vec{r}'(s)}{ds} \times (\vec{r} - \vec{r}'(s))}{|\vec{r} - \vec{r}'(s)|^3} ds$$

また計算すると,

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = (-a, 0, 0)$$

$$(-a, 0, 0) \times (x - a(1-s), y - l, z)$$
$$= (0, az, -a(y-l))$$

$$B_x^{BC}(\vec{r}) = 0$$

$$B_y^{BC}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^1 \frac{az}{[(x-a(1-s))^2 + (y-l)^2 + z^2]^{3/2}} ds$$
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \frac{z}{[(x-x')^2 + (y-l)^2 + z^2]^{3/2}} dx'$$

$(x' = a(1-s)$ と変数置換$)$

同様に,

$$B_z^{BC}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a \frac{y-l}{[(x-x')^2 + (y-l)^2 + z^2]^{3/2}} dx'$$

$\vec{B}^{CD}(\vec{r})$も同様に求められる.

No. 46

Date

最終結果

$$B_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^l \frac{z}{[(x-a)^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}dy' - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^l \frac{z}{[x^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}dy'$$

$$B_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \frac{z}{[(x-x')^2+(y-l)^2+z^2]^{3/2}}dx' - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \frac{z}{[(x-x')^2+y^2+z^2]^{3/2}}dx'$$

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \frac{y}{[(x-x')^2+y^2+z^2]^{3/2}}dx' - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^a \frac{y-l}{[(x-x')^2+(y-l)^2+z^2]^{3/2}}dx' + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^l \frac{x}{[x^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}dy' - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^l \frac{x-a}{[(x-a)^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}dy'$$

$r \equiv |\vec{r}|$として$r \gg a$, $r \gg l$のとき,

$$[(x-a)^2+(y-y')^2+z^2]^{-\frac{3}{2}} \simeq \frac{1}{r^3}\left(1-\frac{2xa}{r^2}-\frac{2yy'}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \frac{1}{r^3}\left(1+\frac{3xa}{r^2}+\frac{3yy'}{r^2}\right)$$

$$B_x(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^l \frac{z}{r^3}\left(1+\frac{3xa}{r^2}+\frac{3yy'}{r^2}\right)dy' - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^l \frac{z}{r^3}\left(1+\frac{3yy'}{r^2}\right)dy'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{3alzx}{r^5}$$

同様に

$$B_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{3alzy}{r^5}$$

$$B_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{al(3z^2-r^2)}{r^5}$$

電気双極子 $\vec{p}=(0,0,p)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zx}{r^5}, \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3zy}{r^5}, \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3z^2-r^2}{r^5}\right)$$

と同じ形。

磁気双極子(小さな磁石)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3}\right)$$

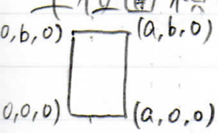
($\vec{m}$:磁気双極子モーメント)

では、$\vec{m}=(0,0,I\underbrace{al}_{\text{面積}})$

磁気双極子層(板磁石)

磁気双極子が面状に分布。

単位面積あたりの $\vec{m}$ が $(0,0,\sigma)$ で



という面のとき、

$$\vec{B}_x(\vec{r}) = \int_0^l\int_0^a \frac{3z(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{5/2}}dx'dy'$$

$$= \frac{\mu_0\sigma}{4\pi}\int_0^l\int_0^a \frac{\partial}{\partial x'}\frac{z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}dx'dy'$$

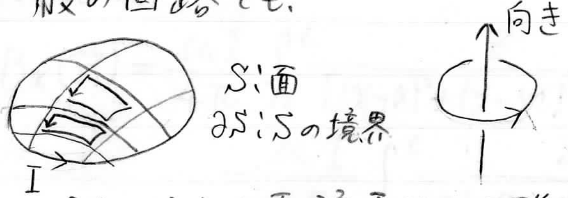
$$= \frac{\mu_0\sigma}{4\pi}\int_0^l \frac{z}{[(x-a)^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}dy'$$

$$- \frac{\mu_0\sigma}{4\pi}\int_0^l \frac{z}{[x^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}dy'$$

$\sigma=I$ とすると、先ほどの $B_x(\vec{r})$ と一致。

$B_y(\vec{r})$, $B_z(\vec{r})$ も一致。

一般の回路でも、



∂Sに流れる電流Iがつくる磁場

$\parallel$

Sに面密度Iで分布する磁気双極子層の磁場

(∂Sが同じならばSの形に依らない)

立体角を用いた表式で直接的に示すこともできる。(省略)

電気双極子の分布がつくる電場$\vec{E}(\vec{r})$は、

$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ を満たす。

一般の電流分布がつくる磁場$\vec{B}(\vec{r})$は、磁気双極子の分布がつくる磁場と同じだから、

$$\boxed{\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0}$$

を満たす。

(磁場が単独で存在しないことを表す)

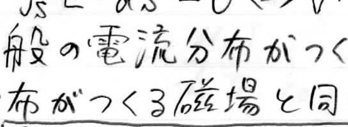
$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$

から直接示すこともできる。

§3.5 Ampèreの法則

$\int_C \vec{B}\cdot d\vec{r}$ を考える。

(i)



電流Iがつくる磁場$\vec{B}$は

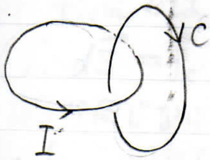
磁気双極子層がつくる磁場と同じ。

電気双極子の分布がつくる電場$\vec{E}$では、

$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r}=0$

よって $\int_C \vec{B}\cdot d\vec{r}=0$.

(ii)



この場合は注意が必要.

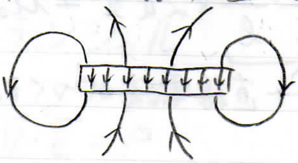
電気双極子

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{|\vec{r}|^5} - \frac{p}{|\vec{r}|^3}\right)$$ は

$\vec{p} = q\vec{d}$ に保って

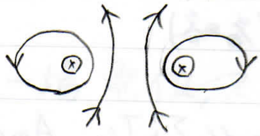
$\vec{d} \to 0$ とする極限で得られる.

極限をとる前の電気双極子層



$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

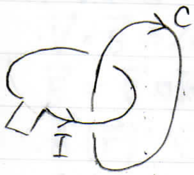
対応する電流がつくる磁場



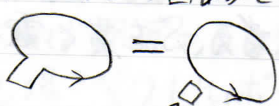
$$\int_C \vec{B}\cdot d\vec{r} \neq 0$$

あとで求める.

i)



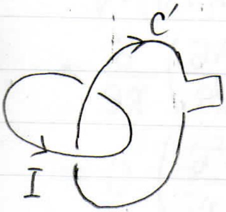
(ii)と同じく回路を変形.



この部分からの磁場を $\Delta\vec{B}(\vec{r})$ とすると

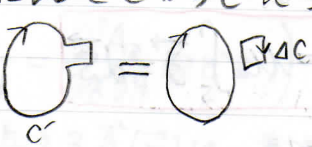
(i)より $\int_C \Delta\vec{B}\cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_C \vec{B}\cdot d\vec{r}$ は(ii)と同じ

)



回路は(iii)と同じ.

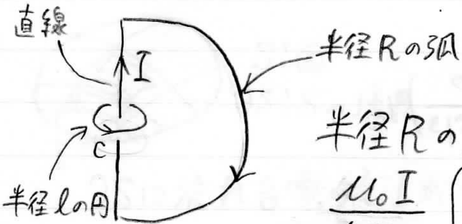
経路をCからC'に変形.



$$\int_{C'} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{B}\cdot d\vec{r} + \underbrace{\int_{\Delta C} \vec{B}\cdot d\vec{r}}_{=0\ ((i)より)}$$

$$= \int_C \vec{B}\cdot d\vec{r}$$

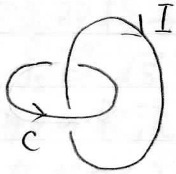
(iii)と(iv)を使って以下のように変形.



半径Rの弧の部分からの$\vec{B}$はCのあたりでは,

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\underbrace{\int}_{\text{長さ}\pi R} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{\underbrace{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}_{\frac{1}{R^2}}} \xrightarrow[(R\to\infty)]{} 0$$

よって $\displaystyle\int_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{l}}_{\text{直線電流がつくる磁場}} \times 2\pi l = \mu_0 I$

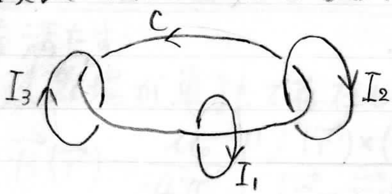


$\displaystyle\int_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 I$.

立体角を用いた表式で

直接的に示すこともできる.(省略)

複数の回路がある場合

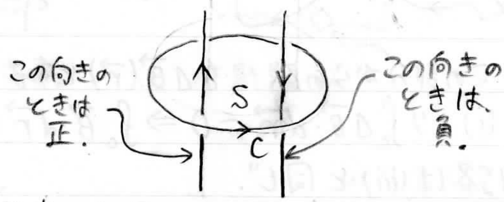


$\displaystyle\int_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_i I_i$ Ampèreの法則

境界∂SがCになるような

曲面Sを考え、Sを貫く電流の和

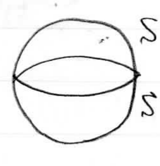
$\mu_0(I_1+I_2-I_3)$



連続分布

$$\boxed{\int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}}$$

$\partial S = \partial S'$のとき,



$$\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} - \int_{S'}\vec{j}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{S-S'}}_{\text{SとS'でできる閉曲面}} \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$\underset{\text{Gaussの定理}}{=} \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{j}\, dV$$

$\partial V = S - S'$

定常電流では $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$ より,

$$\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}=\int_{S'}\vec{j}\cdot d\vec{S}$$

∂S が同じなら S の形に依らない.

Stokesの定理より,

$$\int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{r}=\int_S(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}}$$

Ampèreの法則の微分形

§3.6 ベクトルポテンシャル

静電場

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0,\ \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$

$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$ であれば $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$ は

満たされる。

$\phi(\vec{r})$:スカラー場 電位,スカラーポテンシャル

静磁場

$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j},\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ であれば $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ は満たされる.

$\vec{A}(\vec{r})$:ベクトル場 ベクトルポテンシャル

<u>証明</u>

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$=0\quad\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}\text{ などより}\right)$$

同じ $\vec{B}(\vec{r})$ を与える $\vec{A}(\vec{r})$ は一意ではない.

任意のスカラー場 $\Lambda(\vec{r})$ に対して $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})=0$ なので

$\vec{A}(\vec{r})$ に $\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$ を加えても同じ $\vec{B}(\vec{r})$ を与える。

$\vec{B}(\vec{r})$ を変えない $\vec{A}(\vec{r})$ の変換

$$\vec{A}'(\vec{r})=\vec{A}(\vec{r})+\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$$

をゲージ(gauge)変換という.

$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$のとき、もう一つの式
$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$は
$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\mu_0\vec{j}$となる。
左辺のx成分

$$\frac{\partial}{\partial y}(\vec{\nabla}\times\vec{A})_z-\frac{\partial}{\partial z}(\vec{\nabla}\times\vec{A})_y$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

$$=-\nabla^2 A_x+\frac{\partial}{\partial x}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

y成分, z成分も同様

$$-\nabla^2\vec{A}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})=\mu_0\vec{j}$$

解は一意ではない。$\vec{A}(\vec{r})$が解ならば
ゲージ変換した$\vec{A}'(\vec{r})=\vec{A}(\vec{r})+\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$も解.

$$-\nabla^2\vec{A}'+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}')$$

$$=-\nabla^2\vec{A}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\underbrace{-\nabla^2\vec{\nabla}\Lambda+\vec{\nabla}\overbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Lambda)}^{\nabla^2\Lambda}}_{=0}$$

$$=\mu_0\vec{j}$$

うまくゲージ変換すると$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$を満たすように出来る.
$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})=\alpha(\vec{r})$だったら

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'(\vec{r})=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})+\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r})$$
$$=\alpha(\vec{r})+\nabla^2\Lambda(\vec{r})=0$$

というPoisson方程式の解である$\Lambda(\vec{r})$を使って
ゲージ変換すればよい。一般にこのような条件を
ゲージ固定条件と呼び, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r})=0$は
Coulombゲージの条件と呼ばれる.

Coulombゲージでは解くべき方程式は

$\nabla^2\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{j}(\vec{r})$

となる。x, y, z各成分の式は静電場の

$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec{r})$

と同じ形なので $\vec{r}\to\infty$ で $\vec{A}(\vec{r})\to 0$

となる解は

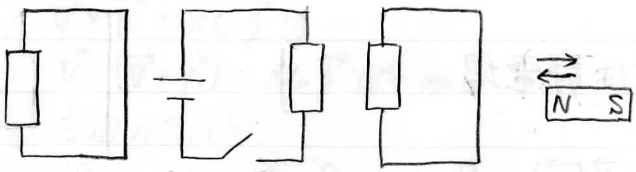
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

Coulombゲージの条件を満たしていることを確認できる。($\nabla\cdot\vec{j}=0$が必要)

$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$を計算すると、Biot−Savartの法則が再現できる。

§4 時間変化する電磁場

§4.1 電磁誘導



Faraday

回路を貫く磁束が変化すると起電力が生じる 電磁誘導

磁束Φ

$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

∂Sが同じとき、$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ならば

ΦはSの形によらない。

(Ampèreの法則の$\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$と同様)

起電力 electro motive force) ϕ emf

$$\phi_{emf} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

ϕ_{emf}がつくる電流がつくる磁場がΦの変化を打ち消すような向き

Lenzの法則

回路の有無によらず

$\phi_{emf} = \int_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

という電場$\vec{E}$が生じているからと考えられる。

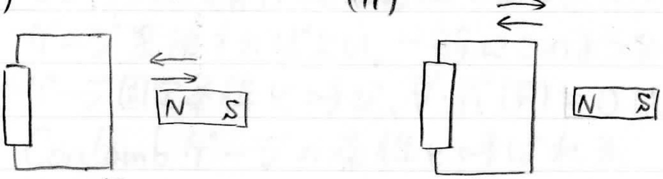
$$\boxed{\int_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

Stokesの定理より、

$\int_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$$

(i) (ii)

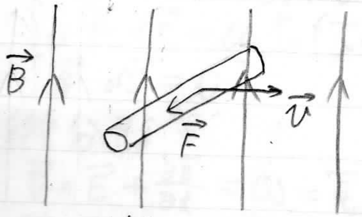


別の慣性系

(ii)でも起電力は生じる。

静磁場中を運動する導体棒

（簡単にするため 棒の向き，速さ，$\vec{B}$は
たがいに垂直であるとする。）



$(q>0)$

導体中の電荷qは

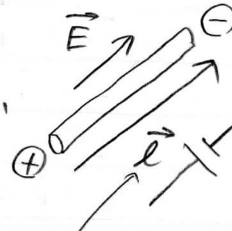
$\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$

というLorentz力を受けて移動し，

$\vec{E}=-\vec{v}\times\vec{B}$

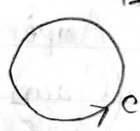
という電場をつくる分布に
なったところで平衡

$\Rightarrow \phi_{emf}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{\ell}$



一般の回路では

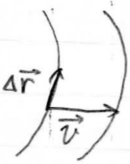
$\phi_{emf}=\int_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}$



これは$\phi_{emf}=-\dfrac{d\Phi}{dt}$と書ける。

$\phi_{emf}=\int_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}$

$\phi_{emf}=-\frac{d\Phi}{dt}$



$$\vec{B}\cdot(\vec{v}\times\Delta\vec{r})$$
$$=\Delta\vec{r}\cdot(\vec{B}\times\vec{v})$$
$$=-\Delta\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})$$

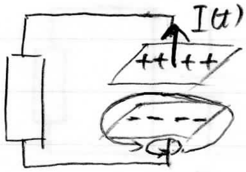
$$\frac{d\Phi}{dt}=-\int_C(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{r}=-\phi_{emf}$$

(i)と(ii)の起電力の起源は異なるように見える。

⇒特殊相対性理論

Date

§4.2 変位電流



Ampèreの法則より

$$\int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{r}=\mu_0\int_S\vec{j}\cdot d\vec{S}$$

右辺のSの形に依らないためには

$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$でなければならない。

微分形 $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$

両辺の発散は

$$0=\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}=\mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\Rightarrow\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0$$

定常電流 $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})=0$

時間変化するときは、

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t)+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)=0$$

$\Rightarrow$ 一般には $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\neq0$

Ampèreの法則の変更が必要

Gaussの法則は成り立つと仮定すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t)=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{j}(\vec{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\right]=0$$

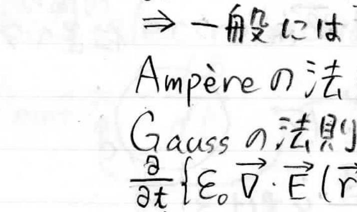
$$\int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{r}=\mu_0\int_S\Big(\vec{j}+\underbrace{\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}_{\text{変位電流}}\Big)\cdot d\vec{S}$$

Maxwell-Ampèreの法則

微分形

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j}$$

コンデンサーの放電



$$E(t)=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A}$$

$$I(t)=-\frac{dQ(t)}{dt}=\varepsilon_0 A\frac{dE(t)}{dt}$$

$\int_{S_1}\vec{j}\cdot d\vec{S}$　　　$\varepsilon_0\int_{S_2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

変位電流

Maxwellが理論の整合性から導入

→電磁波の存在を予言

→Hertzによって実験的に確認

3 Maxwell方程式

積分形

$$\int_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{r}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\varepsilon_0\int_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_V\rho\, dV$$

$$\int_{\partial S}\vec{B}\cdot d\vec{r}=\mu_0\int_S\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

微分形

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0,\quad \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

電荷の保存則

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E})+\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$=\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{1}{\mu_0}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{=0}-\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$$

Maxwell方程式から導かれる。

ある時刻で $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, $\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\rho=0$ であったとする。

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})=\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\rho)=\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$=\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}-\vec{j}\right)-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{=0}-\underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right)}_{=0}=0$$

$\Rightarrow$ その後も $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, $\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}-\rho=0$

成分ごとに数えて6つの方程式

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\mu_0\vec{j}$$

が $\vec{E}$ と $\vec{B}$（合計6成分）の時間発展を決める。

$$\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$ は拘束条件

時間変化する場合でも、$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0$ なので、$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)$ と書ける。

一方, $\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)\neq 0$ なので, 一般には $\vec{E}(\vec{r},t)\neq -\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)$

しかし, $\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

$=\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$ なので,

$\vec{E}(\vec{r},t)+\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}=-\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)$ と書ける.

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t)&=-\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}-\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)\\ \vec{B}(\vec{r},t)&=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)\end{aligned}}$$

$\vec{A}'(\vec{r},t)=\vec{A}(\vec{r},t)+\vec{\nabla}$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\vec{r},t)+\vec{\nabla}\cdot\vec{S}(\vec{r},t)=-\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)$$

$\vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)$: 電場が電荷にする単位体積あたりの仕事率 (§2.3)

$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u\,dV$ ← Vの中のエネルギー変化

$=-\int_V(\vec{\nabla}\cdot\vec{S})dV-\int_V(\vec{j}\cdot\vec{E})dV$

$=-\int_{\partial V}\vec{S}\cdot d\vec{S}-\int_V(\vec{j}\cdot\vec{E})dV$

↑ Gaussの定理 ↑ ∂Vを通って移動するエネルギー ↑ 電荷にする仕事率

§4.5 電磁波

$\rho=0,\ \vec{j}=0$ のとき,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$\vec{E}$と$\vec{B}$がzとtのみの関数の場合 ($\frac{\partial}{\partial x}$や$\frac{\partial}{\partial y}$の項はゼロ)

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial t}=0\qquad \frac{\partial B_z}{\partial t}=0\qquad -\frac{\partial B_y}{\partial z}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}=0\qquad -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial B_y}{\partial t}=0\qquad \frac{\partial E_z}{\partial z}=0\qquad \frac{\partial B_x}{\partial z}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y}{\partial t}=0\qquad \frac{\partial B_z}{\partial z}=0$$

E_z, B_z : z, tに依らない定数

E_xとB_yを含む式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}+\dfrac{\partial B_y(z,t)}{\partial t}=0 & \text{―― ①}\\[2mm] -\dfrac{\partial B_y(z,t)}{\partial z}-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}=0 & \text{―― ②}\end{cases}$$

B_yを消去.

$\frac{\partial}{\partial z}$(①の式)$+\frac{\partial}{\partial t}$(②の式)$=0$

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2}=0$$ 波動方程式

$E_x(z,t)=E_0\cos(kz-\omega t)$ ($E_0>0,\ k>0$ ⇐簡単にするため)

(k:波数 $\lambda=\frac{2\pi}{k}$:波長 ω:角振動数 $T=\frac{2\pi}{\omega}$:周期)

を代入すると.

$\{-k^2-\varepsilon_0\mu_0(-\omega^2)\}E_0\cos(kz-\omega t)=0$

$\Rightarrow \omega=ck,\quad c\equiv\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

B_yは、$B_y(z,t)=B_0\cos(kz-\omega t)$

として、①,②に代入すると.

①$\Rightarrow(-kE_0+\omega B_0)\sin(kz-\omega t)=0$

②$\Rightarrow(kB_0-\varepsilon_0\mu_0\omega E_0)\sin(kz-\omega t)=0$

$$\begin{cases}-kE_0+\omega B_0=0\\ kB_0-\varepsilon_0\mu_0\omega E_0=0\end{cases}$$

$\Rightarrow B_0=\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,E_0=\frac{E_0}{c}>0$

$$\begin{cases}E_x(z,t)=E_0\cos(kz-\omega t)\\ B_y(z,t)=B_0\cos(kz-\omega t)\end{cases}$$

でE_0, B_0, kがすべて正の定数のとき.

$\omega=ck,\ B_0=\frac{E_0}{c},\ c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ ならば解で、z軸の正の方向に進む波を表す。:電磁波

波の速さvは、$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{\omega}{k}=c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.998\times10^8$ (m/s). 光速

E_yとB_xを含む式でも同様に電磁波の解が構成できる. (E_x,B_y) (E_y,B_x) ; 2種の偏光

波の進む向きは$\vec{E}\times\vec{B}$ (Poyntingベクトルの向きと一致)

§4.6 交流回路

導体内部で電場が $\vec{E}(t)=\vec{E}_0\sin\omega t$ と

時間変化しているとき、Ohmの法則より、

$\vec{j}(t)=\sigma\vec{E}(t)=\sigma\vec{E}_0\sin\omega t$

変位電流の密度は、

$\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}(t)}{\partial t}=\varepsilon_0\omega\vec{E}_0\cos\omega t$

$\Rightarrow\omega\ll\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ ならば変位電流は無視できる。

このような電流を準定常電流と呼ぶ。

普通の金属では $\sigma\cong10^{7}\Omega^{-1}m^{-1}$ 程度, $\varepsilon_0\cong10^{-11}C^2/N\cdot m^2$ より、$\omega\ll10^{18}s^{-1}$

普通の交流では変位電流は無視できる。

準定常電流 $I(t)$ がつくる磁場はBiot-Savartの法則を使って求められる。

このとき回路を貫く磁束 $\Phi(t)$ は $I(t)$ に比例する。

$\Phi(t)=LI(t)$

誘導起電力 $\phi_{emf}(t)$ は、

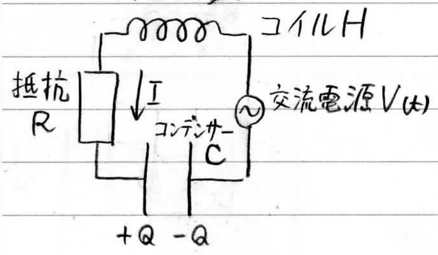
$\phi_{emf}(t)=-\frac{d\Phi(t)}{dt}=-L\frac{dI(t)}{dt}$

L：自己インダクタンス

(回路の形によって決まる)

単位：H(ヘンリー)　$H=V\cdot s/A$

LCR回路



$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)+\frac{1}{C}Q(t)=V(t)$

$I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$ より、

$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=V(t)$

これは減衰振動の方程式

$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\eta\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$ と同じ形

$V(t)=0$ のときは $f(t)=0$ の減衰振動に対応